神戸女子短期大学　論攷　49巻　59－67（2004）

―― ノート ――

スプレッドシートソフトウェアを利用した物理教育

浅木森　和　夫

Spreadsheet Software in the Physics Education

Kazuo Asakimori

要　旨

物理教育における自然現象の数学的モデル化ならびにそれを解くための数学的近似は単振り子周期の振幅依存性の例のように学習者に不満を呼び起こすひとつの要因となっている。ここでは，手軽に利用できるスプレッドシートソフトウェアを利用して数値的に現象を分析し，学習者の不満を軽減する工夫を試みた。パラメータの変化に即計算結果が追随するスプレッドシートソフトウェアの機能は動的なシミュレーションの簡易な道具として利用することが可能であることも判明した。

キーワード：物理教育　physics education,
スプレッドシートソフトウェア　spreadsheet software,
数値シミュレーション　numerical simulation

1　はじめに

物理学ならびにその考え方，方法論は自然科学にとどまらず社会科学の分野においても重要で，有用な手段を提供している。物理学には基礎的概念を多々含むところがある。それ故，その応用範囲も広くその教育効果は計り知れないところがある。

近年の教育改革における学校教育現場での理科離れは，若者の理科嫌いを容認する形で進められ，人の健やかな概念形成，基本概念の育成を大きく疎外しているように感じられる。そのような中，最近は理科教育関係者が積極的に難しいと言われる理科を分かりやすく教育する工夫を行ってきている。また，大学教育においても先に述べたような点から物理教育は重要な位置を占めていると考えられる。しかしながら，入学時の理科履修者の多様化により学生の先行経験に応じた，教育内容，教育方法の工夫[1)]が要求されてきている。

物理学の研究対象は，主に生命現象を伴わない自然現象である。物理教育においては研究対象を数学的モデルに置き換え，そのモデルを分析することによって幅を広げている。物体の運動は古典物理学においてはニュートンの運動方程式により記述される。時間とともに変化する

現象を分析するには，変化を数学的に記述することが必要で，そのためには微小時間にどれだけ変化するかを記述する微分法が登場する。微分方程式の登場は，本来微分が時間変化の中での現象変化を記述するという考えから，物理学だけではなく社会現象の研究においても有用であることは容易に理解することができよう。

物理教育では，物体の運動を論ずる時にどのような数学的モデルを構築するか，その基本から開始される。そして，運動は時間に関して 2 階の微分方程式（ニュートンの運動方程式）に帰着することを示し，その後，いくつかの物理現象について運動方程式を作成しそれを解くことによって物体の運動への理解に導く。ところが，実際の運動について運動方程式を記述しても多くの場合，非線形方程式が現れるために解析的に解くことが不可能で何らかの線形近似を行い，近似的な現象の分析で満足する必要がある。

たとえば，長さ l のひもの一端に質量 m のおもりを付けた振り子（単振り子）の運動方程式は

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+mg\sin\theta=0$$

と表される。しかしながら，この方程式はそのままでは解析的に解くことができない。そこで，振り子の振幅が小さいものと仮定し $\sin\theta \sim \theta$ との近似のもとに，方程式を線形化し，周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ を求める。ここで，求めた周期は振り子の振幅に関係しないということから有名なガリレイの等時性への説明とつながる。しかしながら，この話を聞いていても，何となくわかったようで，それではここで導入した近似が成立しない振り子の振幅が大きいときには周期はどのようになるのだ，との疑問はいつまでも心に残ってしまう。多くの場合，「近似を行わないときには，この微分方程式を解くことは大変難しいことなんだ」とあきらめなさいとでも言わんかの口調で説明は終わってしまっている。このことは，大学に進学しても同じでありいつまでたっても釈然としないものが残ってしまう。

学習者の釈然としない気持ちを和らげる方法として，微分方程式を数値的に解き，その解を可視化する事が考えられる。微分方程式の単純な数値解法はそれほど難しくない。従来，微分方程式の数値解を求めるために，適当なプログラミング言語を用いてプログラムを組む必要があった。ところが，パソコンの発達とともにビジネス分野で必要な数値処理を手軽に実現できるスプレッドシートソフトウェア（表計算ソフトウェア）が登場してきた。このソフトウェアはビジネス分野に視点をおいたものであるが，2次元の表を時間軸と変化する物理量の軸に設定することにより，物理現象の理解にも使えることがわかる。また，このソフトウェアにはあらかじめグラフ機能が用意されており，スプレッドシート上の数値を手軽に可視化することが簡単に実現できることもメリットである。パラメータをスプレッドシート上に用意しておき，パラメータを変えることによって再計算を行わせ，それを可視化することにより，現象の動的

な理解の助けにもつながることが予想される。

物理学は実験や観察を通して得られた結果をよりどころに，自然界に存在する法則を探求して行くことがその本旨であり，実験結果から法則を帰納するためには実験で得られたデータを処理することが重要な課題である。加えて，観測に伴う誤差の処理なども重要な学習対象となっている。このような分野においてもスプレッドシートソフトウェアは物理学習専用のソフトウェアの替わりに手軽に利用することができる。

ここでは，高知大学教育学部において筆者が集中講義で行った，単振り子周期の振幅依存性をスプレッドシートソフトウェアを利用して数値的に分析するとともに結果を可視化することにより，より現実に近い物理現象の理解に近づける実践について解説を行うとともにまとめを行うものである。

2　単振子の周期

ガリレオ・ガリレイにより振り子の周期が，その振幅に依存しないことが発見されたことは有名な事柄である。これを振り子の等時性と呼んでいる。実は，この等時性は振幅がどのような大きさであっても成り立つ分けではなく，小振幅において成り立つことが知られている。

今，長さ l のひもの一端を固定しておいて，他端に質量 m のおもりをつけ，振らしたものを単振り子と呼んでいる。単振り子の運動方程式は

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

と与えられる。この式で，角度 θ は振り子の釣り合いの位置を基準として測ったふれの角度であり，g は重力加速度を表している。いま，$\theta=0$ で，$v=v_0=l\omega$（ω は角速度）とする。運動方程式の両辺に，$v=l\dfrac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$ml^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

となる。この式は，

$$\frac{1}{2}d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{g}{l}\sin\theta d\theta$$

と変形することができる。この式の両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\omega^2=\left[\frac{g}{l}\cos\theta\right]_0^\theta=\frac{g}{l}\cos\theta-\frac{g}{l}$$

となる。また，この式は

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\omega^2-\frac{4g}{l}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

と変形することができる。ところで，この式において右辺は $\theta=\pi$ の時に最小値 $\omega^2-\dfrac{4g}{l}$ を持つが，この値が正の時には，最高点を通りすぎてしまう。負の時には，$\omega^2-\dfrac{4g}{l}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ となる α を振幅として振動する。今，$\omega^2=\dfrac{v_0^2}{l^2}=\dfrac{4g}{l}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ として，

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}dt=\pm\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

となるが，t と共に θ が増えるときについて，$t=0$ で $\theta=0$ とし（＋をとる）積分すると

$$\sqrt{\frac{g}{l}}t=\int_0^{\theta}\frac{d\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta'}{2}}}$$

となる。ここで，$\sin\dfrac{\theta'}{2}=\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\phi=k\sin\phi$，$k=\sin\dfrac{\alpha}{2}<1$ とおくと

$$\sqrt{\frac{g}{l}}t=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

と表すことができる。この式の右辺を第 1 種の楕円積分（Legendre の標準形）と呼び，この関数は初等関数で表すことのできないことが判明している。このとき，振り子の周期 T は

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k)$$

この式で $K(k)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ は第 1 種完全楕円積分と呼ばれている。このように，単振り子の周期は振幅 α に依存していることが分かっている。また，第 1 種完全楕円積分の級数展開を使うと，周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots\right)$$

と表される。

具体的に，最大振れの角が $\alpha=90^\circ$ のときに，級数展開を使って数値計算を行ってみると周期が振幅に関係しないとしたときのものから18%伸びることが分かる。

長島弘幸氏は，$K(k)$ の値を求めるのに，Landen 変換と相加相乗平均数列を用いて比較的分かりやすく授業で実践する方法を述べている。[2)]

楕円関数論の立ち入った説明に入るには初学者には無理があるが，「小角近似で単振り子の周期は振幅に依存しないでしょう」と説明するだけでは，学習者にはフラストレーションだけ

が溜まり，釈然としないものだけが残るものと思われる。したがって，比較的簡単な説明で釈然としないものを少しは理解できたという気持ちにつなげる努力が重要であると考えている。

3　微分方程式の数値解

一般に導関数を含む関係式を微分方程式と呼んでいる。そして，微分方程式に含まれる導関数が唯一の独立変数からなっているとき，その微分方程式を常微分方程式と呼んいる。常微分方程式からもとの関数を求めることが，微分方程式を解くことになる。ここで取り上げる振り子の運動方程式は独立変数が唯一の時間からなる常微分方程式である。

常微分方程式の数値解を求めるにおいては，独立変数のある値において，関数や導関数の値が与えられる必要がある。この値を初期条件と呼んでいる。初期条件を与えて，微分方程式を解く問題が初期値問題である。また，２階の微分方程式は２つの１階の連立微分方程式と同等と考えることができる。

常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

を初期条件 $x=x_0$ のとき $y(x_0)=y_0$ としてを数値的に解くということは，$x=x_0$ から出発して，

$$x=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$$

での y の値

$$y=y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_k,\ \cdots,\ y_n$$

を求めることである。

$x_1-x_0=h_1,\ x_2-x_1=h_2,\ \cdots$をステップ幅と呼んでおり，普通は簡単のために一定幅を取ることが多い。

常微分方程式の数値解法としてはオイラー（Euler）法やルンゲ・クッタ（Runge-Kutta）法などがある。[3)]

関数 $y(x_i)$ の近似値 y_i が求まっている場合に，$(x_i,\ y_i)$ から $x_{i+1}=x_i+h$ における関数値 $y(x_{i+1})$ の近似値 y_{i+1} を求めるために，$y(x_{i+1})$ を $x=x_i$ のまわりでテイラー展開する。

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2!}y''(x_i)+\cdots$$

そして，$y(x_i)$ を近似値 y_i で置き換えると

$$y_{i+1}=y_i+hf'(x_i,\ y_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i,\ y_i)+\cdots+\frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_i,\ y_i)+\cdots$$

が得られる。この式で h の適当なベキ乗の項までで打ち切れば，近似値を求めることができ

るが，$f(x, y)$ の高次微分を計算することは困難であるため実用性に乏しい。

単純なオイラー法では，h の1次の項までを取り

$$y_{i+1}=y_i+hf'(x_i, y_i)$$

という式で，(x_i, y_i) から y_{i+1} を求める。

ルンゲ・クッタ法は，この式を直接計算することなしに，h^4 の項までこの式と一致する計算容易な公式を用いるものである。その公式は

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

で与えられる。ここで，増分 k_1〜k_4 は次の通りである。

$$k_1=hf(x_i, y_i)$$

$$k_2=hf\left(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3=hf\left(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4=hf(x_i+h, y_i+k_3)$$

この方法は，$x_{i+1}=x_i+h$ における y の値 y_{i+1} を求めるのに，直接に刻み幅 h だけ進んだ増分 $k_1=hf(x_i, y_i)$ を用いて $y_{i+1}=y_i+k_1$ とせずに，半分の刻み幅 $\frac{h}{2}$ でかつ k_1 の半分の y_i の増分，すなわち，$\left(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_1}{2}\right)$ の点における傾斜で h だけ進んだときの増分 k_2 を求める。同様にして，増分 k_2 および k_4 を求め，それらの増分に重みをつけて y_{i+1} を計算するものである。この重みは誤差が h^4 の項まで消えるようにつけたものである。

4　振り子の方程式の数値解

単振り子の微分方程式 $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ は時間についての2階微分方程式である。したがって，この微分方程式を数値的に評価するには，この方程式を $\frac{d\theta}{dt}=v_\theta$，$\frac{dv_\theta}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ の連立微分方程式に分解して，それぞれにルンゲ・クッタの公式を適応して数値計算を行う。初期条件としては，時間 $t=0$ において $\theta=\theta_0$（初期振幅），$v_\theta=0$ とする。

この初期条件にしたがって，スプレッドシートソフトウェア（マイクロソフトエクセル）を利用して数値解を求めるにはセルに初期条件，時間の刻みごとの計算式を埋め込むことになる。ここでは，次のようなアレンジを行った。まず，1行目には計算に使用する列がどのような量

であるかを示す見出しを記入する。B 列を時間，C 列振幅，D 列速度，E 列から H 列までが，速度を計算するときに必要なルンゲ・クッタ公式のパラメータ，I 列から L 列までに振幅を計算するときに必要なルンゲ・クッタ公式のパラメータを計算するものとしている。また，時間の刻み（ステップ）ならびに $\frac{g}{l}$ の値は，A2，A5 セルに書き込み，このセルを参照することにより計算することとした。ワークシートの作成は初期状態を 2 行目に入力し，3 行目には逐次計算のための式を入力するとともに 3 行目に入力された式を以降の行にコピーすることによって行う。2 行目に書き込まれる式ならびに値は初期振幅が 60° の場合

B2: 0
C2: 3.14159/3
D2: 0
E2: A2*(-A5*SIN(C2))
F2: A2*(-A5*SIN(C2+E2/2))
G2: A2*(-A5*SIN(C2+F2/2))
H2: A2*(-A5*SIN(C2+G2))
I2: A2*D2
J2: A2*(D2+I2/2)
K2: A2*(D2+J2/2)
L2: A2*(D2+K2)

3 行目には

B3: B2+A2
C3: C2+(I2+2*J2+2*K2+L2)/6
D3: D2+(E2+2*F2+2*G2+H2)/6
E3: A2*(-A5*SIN(C3))
F3: A2*(-A5*SIN(C3+E3/2))
G3: A2*(-A5*SIN(C3+F3/2))
H3: A2*(-A5*SIN(C3+G3))
I3: A2*D3
J3: A2*(D3+I3/2)
K3: A2*(D3+J3/2)
L3: A2*(D3+K3)

ここで，A2，A5 セルに書き込まれている独立変数（時間）のステップ，$\frac{g}{l}$ の値は式のコピーにおいて番地が変わっては困るので絶対参照を行っている。そのためアドレスには$記号が付

いている。計算結果についてはスプレッドシートソフトウェアが持っているグラフ機能を利用して即座にグラフとしてわかりやすく表現することができる。ここでは，縦軸に振幅，横軸に時間を取りグラフとして表す。グラフの種類としては，折れ線グラフを使うことが考えられるが，散布図を使い点を平面に打つことにより表現している。点を打つ時間間隔を短くするとともに点の大きさを変えることによってひとつの連続した曲線として見える。ここで，C2 番地の初期振幅の値を変化させたり，A5 番地の振り子の長さを変えると周期がどのように変化するか，すぐに結果がグラフに表示されて視覚的に理解が進む。スプレッドシートソフトウェアの良いところは式の入力は最小限行い，必要に応じて式をコピーすることにより，式の中の参照位置を相対的に変化させてくれること，すなわち，式のコピー操作で簡単に入力をすますことができる手軽さ，ならびに，ワークシートに書き込まれているパラメータを変化させるだけで即座に再計算が行われることである。このことは，パラメータ変化が結果にどのように反映するかを調べるシミュレーションにおいて応用範囲が大変広いことを意味している。加えて，グラフ機能は結果のわかりやすい表現には欠かすことができない。

スプレッドシートソフトウェアのグラフ機能を利用して，初期振幅が 60° の場合について，元の微分方程式を数値的に解いた場合と微小角近似の基に線形化して解いた場合について，その結果を横軸に時間，縦軸に振幅をとってグラフに示したものが図 1 である。

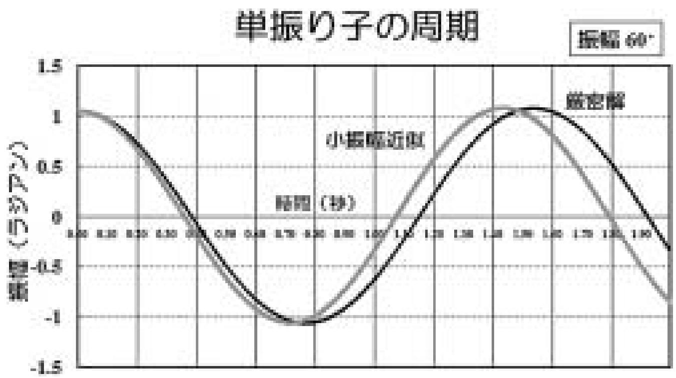

図１　振り子の周期

この図から，振幅が 60° の場合，微小角近似に比べて周期に約 7 %ののびがあることが容易に見て取ることができる。また，シミュレーションにおいてはワークシートに書き込まれている振幅初期値を変化させるとすぐに結果がこのグラフに反映される。そのため，学習者はいろいろなケースについて結果をすぐに見ることが可能であり，理解の即時性を期待することができる。

5　おわりに

スプレッドシートソフトウェアはビジネスに関係するデータを処理することを目的に開発さ

れてきたものであるが，処理可能なデータ件数の拡大，グラフ機能や利用することができる関数の充実等により，科学教育の分野においても有効に利用することが可能になってきた。

ここでは，身の回りの物理現象のひとつである単振り子を例に取り，それまでの小振幅近似から一歩進んでより現実の自然現象に近い理解を図ることを目的にスプレッドシートソフトウェアの活用を考えてみた。物理教育においては，直面する近似と現実とのギャップをどのようにして融合させて行くのかということは重要なテーマである。学習者が学習時に直面する仮想と現実の狭間を埋める努力をどのように行うか，その一つとして情報技術の利用を考えることができよう。理科離れの原因は多々あろうと思われるが，理科教育においてはもう少し実際問題に役立つように教えることが必要であり，その工夫が理科離れを防ぐためのひとつとして役立つものと考えている。

6　参考文献

１）浅木森和夫：大学の物理教育，Vol.3，p28，日本物理学会（1995）

２）長島弘幸：大学の物理教育，Vol.1，p42-43，日本物理学会（1998）

３）森正武：数値計算プログラミング，岩波書店，（1987）